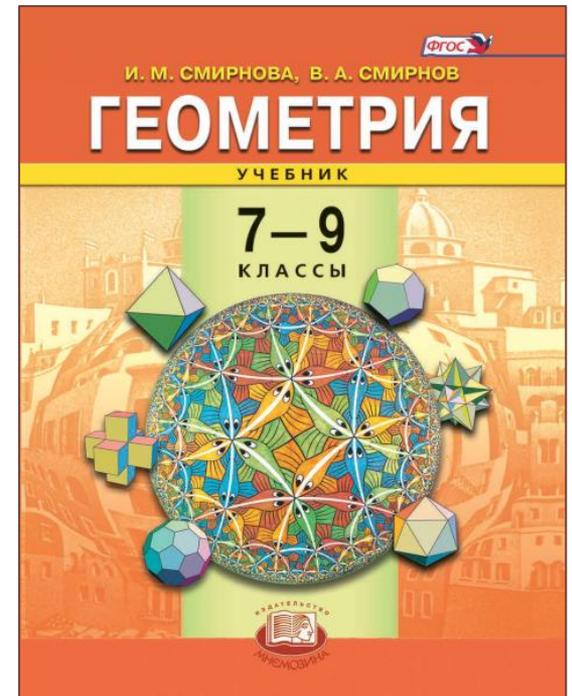


УГЛЫ. 7 КЛАСС

Презентация к §4 учебника
«Геометрия. 7-9 классы»
И.М. Смирновой и В.А. Смирнова

Полуплоскость и угол



ВЕДУЩИЙ: Смирнов Владимир Алексеевич, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики МПГУ, автор учебников по геометрии для 5-6 7-9 и 10-11 классов

E-mail: v-a-smirnov@mail.ru

Сайт: vasmirnov.ru

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии для 5-11 классов

Авторы:

Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.

Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

Учебно-методический комплект по геометрии

Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов

Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов

Программа по геометрии для 5-6 классов

Дидактические материалы

Уроки геометрии с "Power Point"

5-6 классы

7-9 классы

10-11 классы

Геометрия с "GeoGebra".

Элементарная математика для студентов педагогических вузов

Статьи о преподавании геометрии



[Видеолекции и вебинары](#)

[Подготовка к ГИА](#)

[Подготовка к ЕГЭ](#)

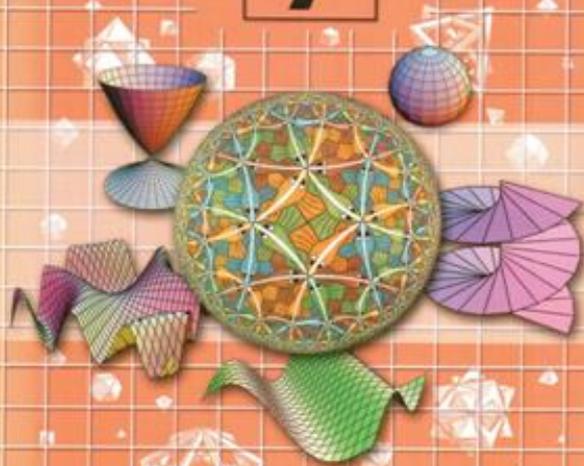
Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

И. М. СМЕРНОВА, В. А. СМЕРНОВ

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

7



И. М. СМЕРНОВА
В. А. СМЕРНОВ

ГЕОМЕТРИЯ

7

КЛАСС

МЕТОДИЧЕСКИЕ
РЕКОМЕНДАЦИИ
для учителя



Учебники геометрии 7-9 классов

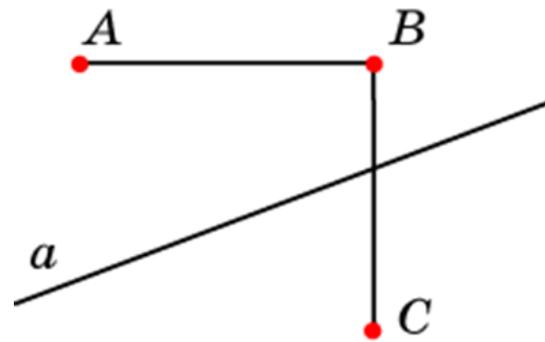
Авторы	Страниц	Задач	Рисунков
Л.С. Атанасян и др.	384	1310	374
А.В. Погорелов	224	816	332
И.Ф. Шарыгин	352	912	340
И.М. Смирнова, В.А. Смирнов	376	1540	588

Глава I. НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИВведение1. Основные геометрические фигуры2а. Отрезок и луч2б. Операции над отрезками3. Измерение длин отрезков4а. Полуплоскость и угол4б. Операции над углами5а. Измерение величин углов5б. Практические задачи6а. Ломаные6б. Многоугольники

Введение	3
Глава I	
Начальные геометрические сведения	5
§ 1. Прямая и отрезок	—
1. Точки, прямые, отрезки	—
2. Провешивание прямой на местности	6
Практические задания	7
§ 2. Луч и угол	8
3. Луч	—
4. Угол	—
Практические задания и вопросы	10
§ 3. Сравнение отрезков и углов	—
5. Равенство геометрических фигур	—
6. Сравнение отрезков и углов	11
Вопросы и задачи	12
§ 4. Измерение отрезков	13
7. Длина отрезка	—
8. Единицы измерения. Измерительные инструменты	15
Практические задания	16
Вопросы и задачи	17
§ 5. Измерение углов	18
9. Градусная мера угла	—
10. Измерение углов на местности	20
Практические задания	—
Вопросы и задачи	21
§ 6. Перпендикулярные прямые	22
11. Смежные и вертикальные углы	—
12. Перпендикулярные прямые	—
13. Построение прямых углов на местности	23
Практические задания	24
Вопросы и задачи	—
Вопросы для повторения к главе I	25
Дополнительные задачи	26

4а. Полуплоскость и угол

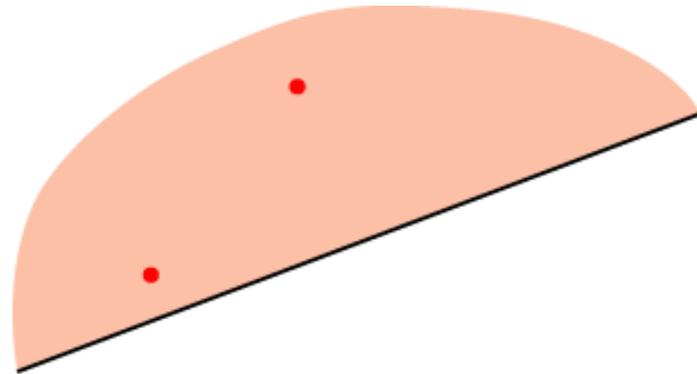
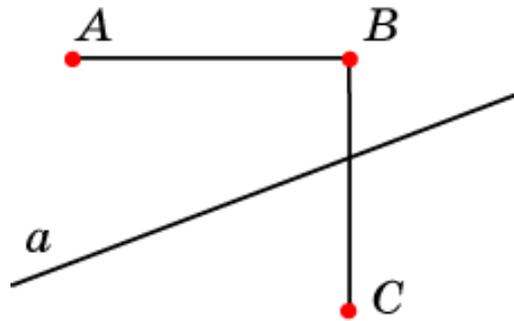
Проведем на плоскости какую-нибудь прямую a . Она разобьет плоскость на две части. На рисунке точки A и B принадлежат одной из этих частей, отрезок AB не пересекает прямую.



В этом случае говорят также, что точки A и B *лежат по одну* сторону от прямой a . Точки B и C принадлежат разным частям плоскости, отрезок BC пересекает прямую. В этом случае говорят также, что точки B и C *лежат по разные стороны* от прямой a .

Следующее свойство является аксиомой взаимного расположения точек на плоскости относительно данной прямой.

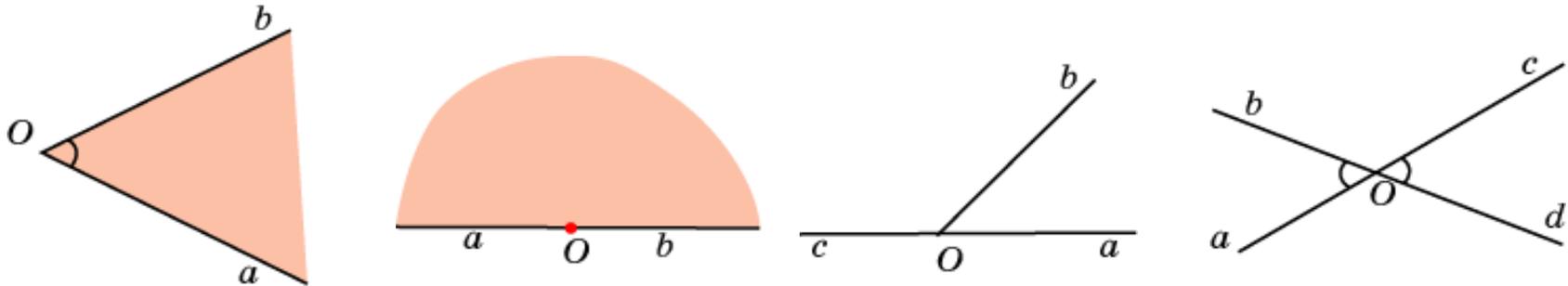
Каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части. При этом если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой. Если две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой.



Полуплоскостью называется ... часть плоскости, состоящая из точек данной прямой и точек, ... лежащих по одну сторону от этой прямой.

Угол

Углом называется фигура, образованная ... двумя лучами с общей вершиной и ... одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами. Общая вершина называется... **вершиной угла**. Сами лучи называются... **сторонами угла**.



Угол называется **развернутым**, если ... его стороны вместе составляют одну прямую.

Два угла называются **смежными**, если ... одна сторона у них общая, а две другие ... вместе составляют одну прямую.

Два угла называются **вертикальными**, если ... стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла.

Для получения угла в программе GeoGebra можно воспользоваться инструментом «Луч», и построить два луча с общей вершиной. Положение, обозначения, размеры и цвет точек и лучей можно изменять.

The screenshot shows the GeoGebra Classic 5 interface. The title bar reads "GeoGebra Classic 5". The menu bar includes "Файл", "Правка", "Вид", "Настройки", "Инструменты", "Окно", and "Справка". The toolbar contains various geometric construction tools, including a selection tool, a point tool, a line tool, a ray tool, a circle tool, a circle with center tool, a circle with diameter tool, a line with slope tool (set to $a=2$), and a move tool. The "Панель объектов" (Object Panel) on the left lists the following objects:

- $A = (-1, 1)$
- $B = (4, 1)$
- $f: y = 1$
- $C = (2, 4)$
- $g: -3x + 3y = 6$

The main workspace, labeled "Полотно", shows a coordinate grid with a horizontal line f passing through points A and B , and a diagonal line g passing through points A and C . The input field at the bottom is labeled "Ввод:" and is currently empty.

Вопрос 1

На сколько частей прямая
разбивает плоскость?

Ответ: На две части.

Вопрос 2

В каком случае две точки принадлежат:

а) одной полуплоскости;

б) разным полуплоскостям относительно данной прямой?

Ответ: а) Если отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой.

б) если отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой.

Вопрос 3

Какая фигура называется углом? Что называется вершиной угла? Что называется сторонами угла?

Ответ: Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами, называется углом. Общая вершина называется вершиной угла, а сами лучи - сторонами угла.

Вопрос 4

Какой угол называется развернутым?

Ответ: Угол называется развернутым, если его стороны вместе составляют прямую.

Вопрос 5

Какие углы называются смежными?

Ответ: Два угла называются смежными, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую.

Вопрос 6

Какие углы называются вертикальными?

Ответ: Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла.

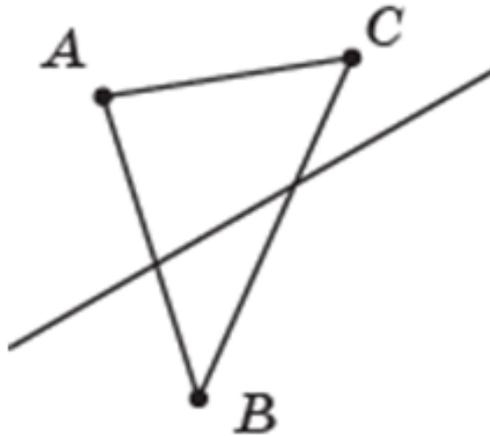
Вопрос 7

Как обозначаются углы?

Ответ: Угол обозначается или одной буквой, указывающей его вершину, или тремя буквами, средняя из которых указывает вершину угла, а крайние – какие-нибудь точки на сторонах угла. Например, $\angle A$, $\angle AOB$ и т.д. Иногда углы обозначаются цифрами, например, $\angle 1$, $\angle 2$ и т. д.

Пример

Даны прямая и три точки A , B , C , не принадлежащие этой прямой. Известно, что отрезок AB пересекает прямую, а отрезок AC не пересекает её. Докажите, что отрезок BC пересекает эту прямую.



Решение. Из того, что отрезок AB пересекает прямую следует, что точки A и B лежат по разные стороны от этой прямой. Из того, что отрезок AC не пересекает прямую следует, что точки A и C лежат по одну сторону от прямой. Таким образом, точки B и C лежат по разные стороны от прямой и, следовательно, отрезок BC пересекает прямую.

Упражнение 1

Даны прямая и четыре точки A , B , C , D , не принадлежащие этой прямой. Пересекает ли эту прямую отрезок AD , если: а) отрезки AB , BC и CD пересекают прямую; б) отрезки AC и BC пересекают прямую, а отрезок BD не пересекает; в) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает; г) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает; д) отрезки AB , BC и CD не пересекают прямую; е) отрезки AC , BC и BD пересекают прямую? Изобразите данные ситуации.

Ответ: а), г), е) Да; б), в), д) нет.

Упражнение 2

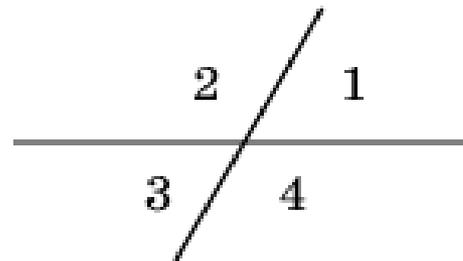
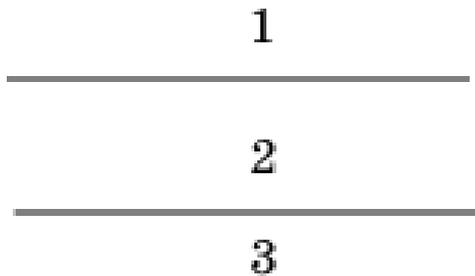
Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости, а две другие - в другой полуплоскости относительно этой прямой. Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков: а) пересекает прямую; б) не пересекает прямую? Сделайте соответствующий рисунок.

Ответ: а) 6; б) 4.

Упражнение 3

На сколько частей могут разбивать плоскость две прямые?

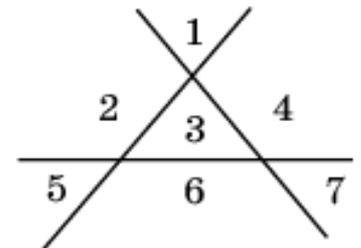
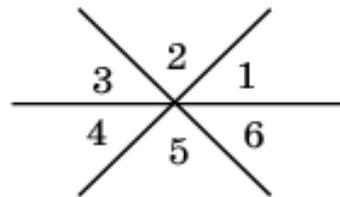
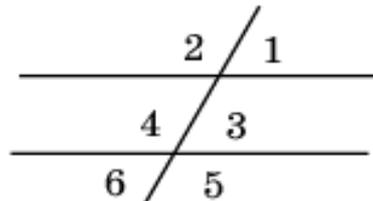
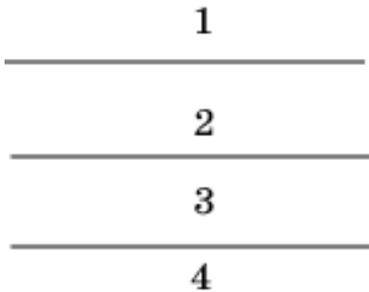
Ответ: На три части, если прямые параллельны и на четыре части, если они пересекаются.



Упражнение 4

На сколько частей могут разбивать плоскость три прямые?

Ответ: На четыре, шесть или семь частей



Упражнение 5

На сколько частей делят плоскость: а) два луча с общей вершиной; б) три луча с общей вершиной; в) четыре луча с общей вершиной; г) n лучей с общей вершиной?

Ответ: а) 2; б) 3; в) 4; г) $n+1$.

Упражнение 6

На сколько частей делят плоскость n прямых, пересекающихся в одной точке?

Ответ: $2n$.

Упражнение 7

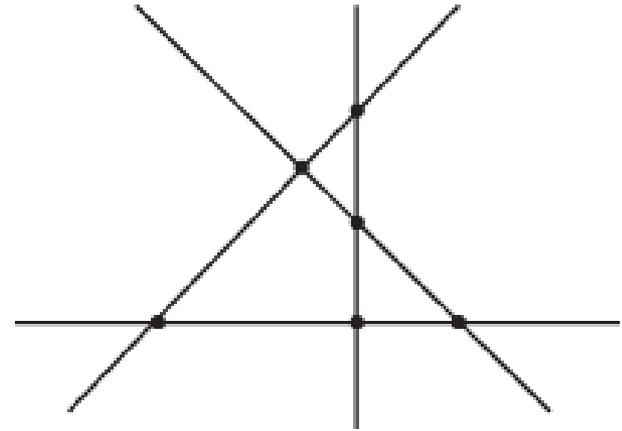
Изобразите: а) три попарно пересекающиеся прямые, не пересекающиеся в одной точке; б) четыре попарно пересекающиеся прямые, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. На сколько частей они разбивают плоскость?

Ответ: а) 7; б) 11.

Упражнение 8*

На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

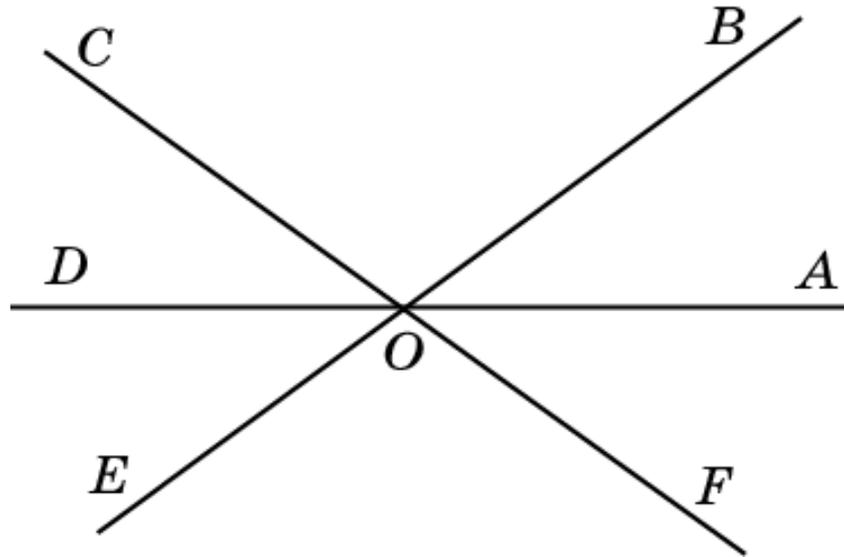
Решение. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой прямой к данным. Это увеличение происходит за счет того, что какие-то части плоскости разбиваются новой прямой на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся прямые, то при добавлении третьей прямой три из имеющихся четырех частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно $7 = 4 + 3$.



Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой прямой, равно количеству частей новой прямой, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися прямыми. Каждая такая часть новой прямой разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Поскольку n -я прямая пересекается с $n - 1$ прямой, то она разбивается на n частей и поэтому число частей плоскости увеличивается на n . Таким образом, общее число частей равно $4 + 3 + \dots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$.

Упражнение 9

Назовите пары: а) вертикальных; б) смежных углов, изображенных на рисунке.



Ответ: а) $\angle AOB$ и $\angle DOE$, $\angle BOC$ и $\angle EOF$, $\angle COD$ и $\angle FOA$, $\angle AOC$ и $\angle DOF$, $\angle BOD$ и $\angle EOA$;
б) $\angle AOB$ и $\angle BOD$, $\angle BOC$ и $\angle COE$, $\angle COD$ и $\angle DOF$, $\angle DOE$ и $\angle EOA$, $\angle EOF$ и $\angle FOB$, $\angle FOA$ и $\angle AOC$.

Упражнение 10

Сколько имеется углов, смежных данному углу?

Ответ: Два.

Упражнение 11

n лучей имеют общую вершину. Сколько углов образуют пары этих лучей?

Ответ. $n(n - 1)$.

4б. Операции над углами

Одной из основных операций, которую можно производить с углами, является операция **откладывания данного угла** в ту или другую сторону от данного луча. Получающийся при этом угол называется **равным** исходному углу.

В качестве аксиом принимаются следующие свойства.

От любого луча на плоскости в заданную сторону можно отложить только один угол, равный данному.

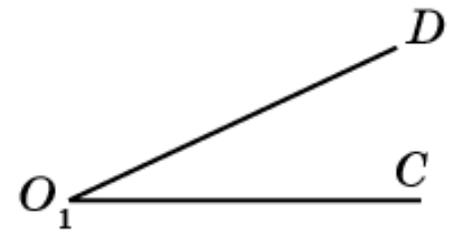
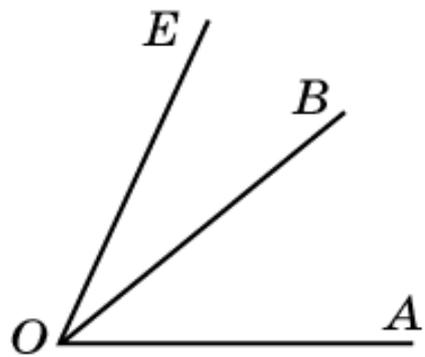
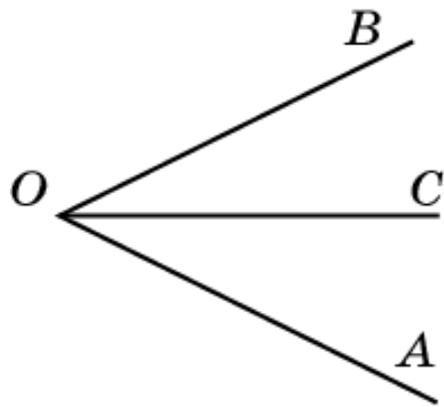
Все развернутые углы равны.

Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ записывается в виде $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Оно означает, что если один из этих углов, например AOB , отложить от луча O_1A_1 в сторону, определяемую лучом O_1B_1 , то угол AOB при этом совместится с углом $A_1O_1B_1$.

Если при откладывании угла AOB от луча O_1A_1 луч OB переходит в луч O_1B' , лежащий внутри угла $A_1O_1B_1$, то говорят, что угол AOB меньше угла $A_1O_1B_1$ и обозначают $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$.

Сложение углов

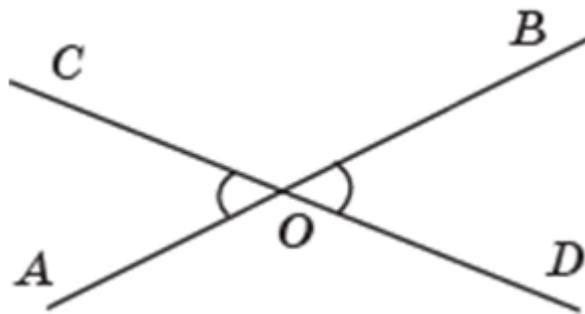
Если внутри угла AOB провести луч OC , то образуется два новых угла AOC и COB . Угол AOB называется **суммой** углов AOC и COB и обозначается $AOB = AOC + COB$. Каждый из углов AOC и COB называется **разностью** угла AOB и другого угла, обозначается $\angle AOC = \angle AOB - \angle COB$, $\angle COB = \angle AOB - \angle AOC$.



Чтобы сложить два угла, например AOB и CO_1D , отложим угол CO_1D от луча OB так, чтобы точки A и D находились по разные стороны от прямой OB . Обозначим OE луч, в который перейдет луч O_1D . Тогда угол AOE даст сумму углов AOB и CO_1D .

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего угла меньшего.

Теорема. Вертикальные углы равны.



Доказательство. Пусть $\angle AOC$ и $\angle BOD$ – вертикальные углы. Стороны OB и OD угла $\angle BOD$ дополняют до прямых стороны соответственно OA и OC угла $\angle AOC$. Тогда углы $\angle AOC$ и $\angle COB$ составляют в сумме развернутый угол. Углы $\angle BOD$ и $\angle COB$ также составляют в сумме развернутый угол. Следовательно, $\angle AOC + \angle COB = \angle BOD + \angle COB$. Вычитая из обеих частей этого равенства $\angle COB$, получаем требуемое равенство $\angle AOC = \angle BOD$.

Угол, равный своему смежному, называется *прямым*. Угол, меньший прямого угла, называется *острым*. Угол, больший прямого угла, но меньший развернутого угла, называется *тупым* (рис. 4.12).

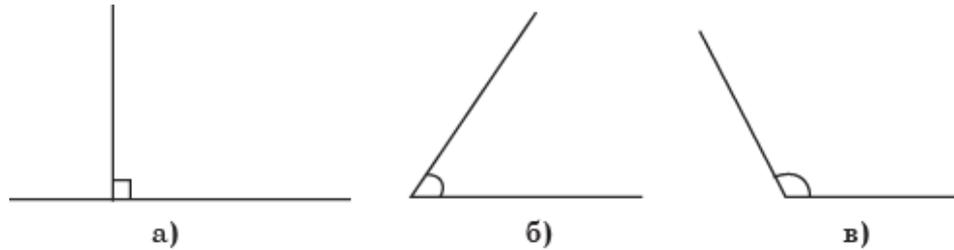


Рис. 4.12

Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами, на которые делятся данные прямые точкой их пересечения (рис. 4.13).

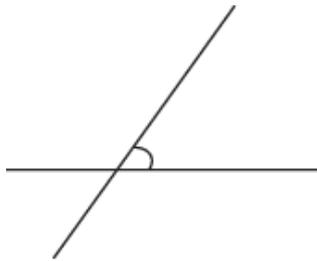


Рис. 4.13

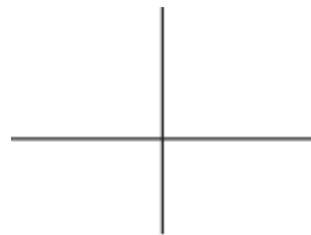


Рис. 4.14

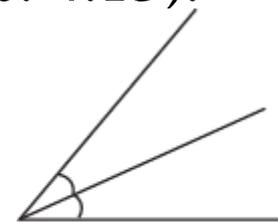
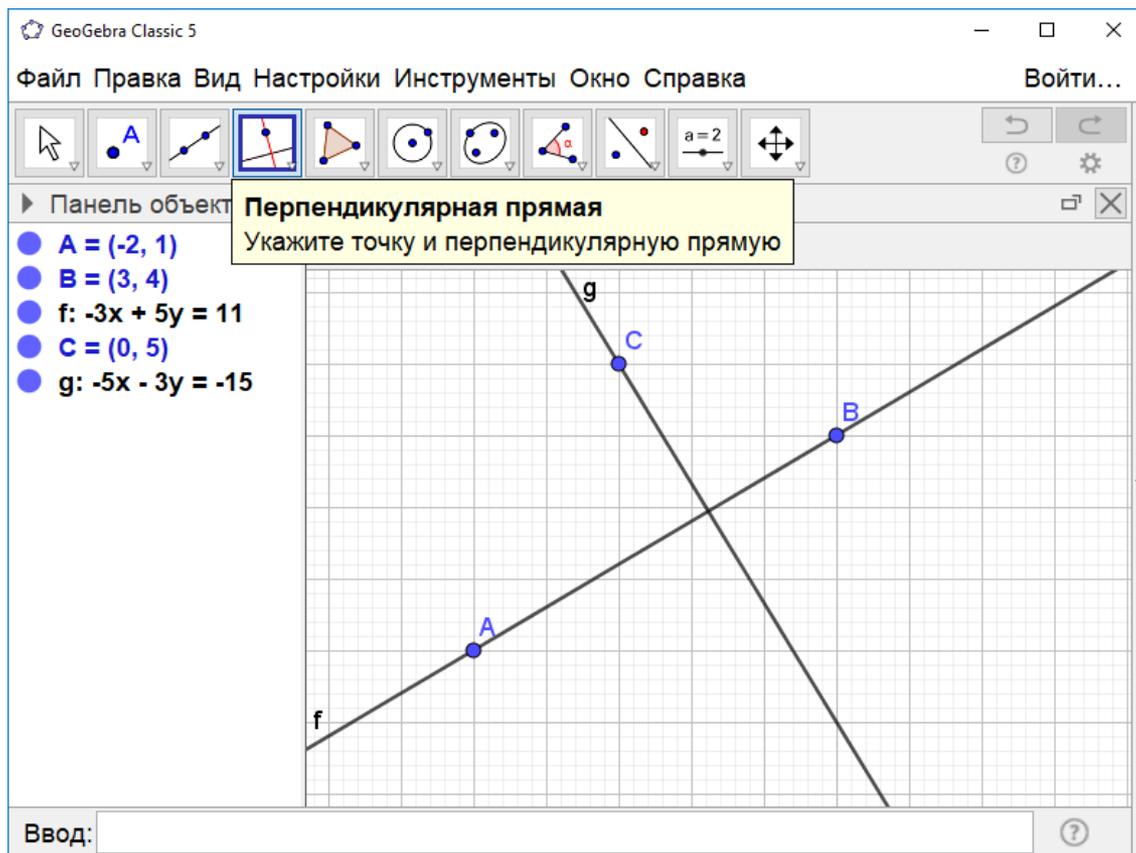


Рис. 4.15

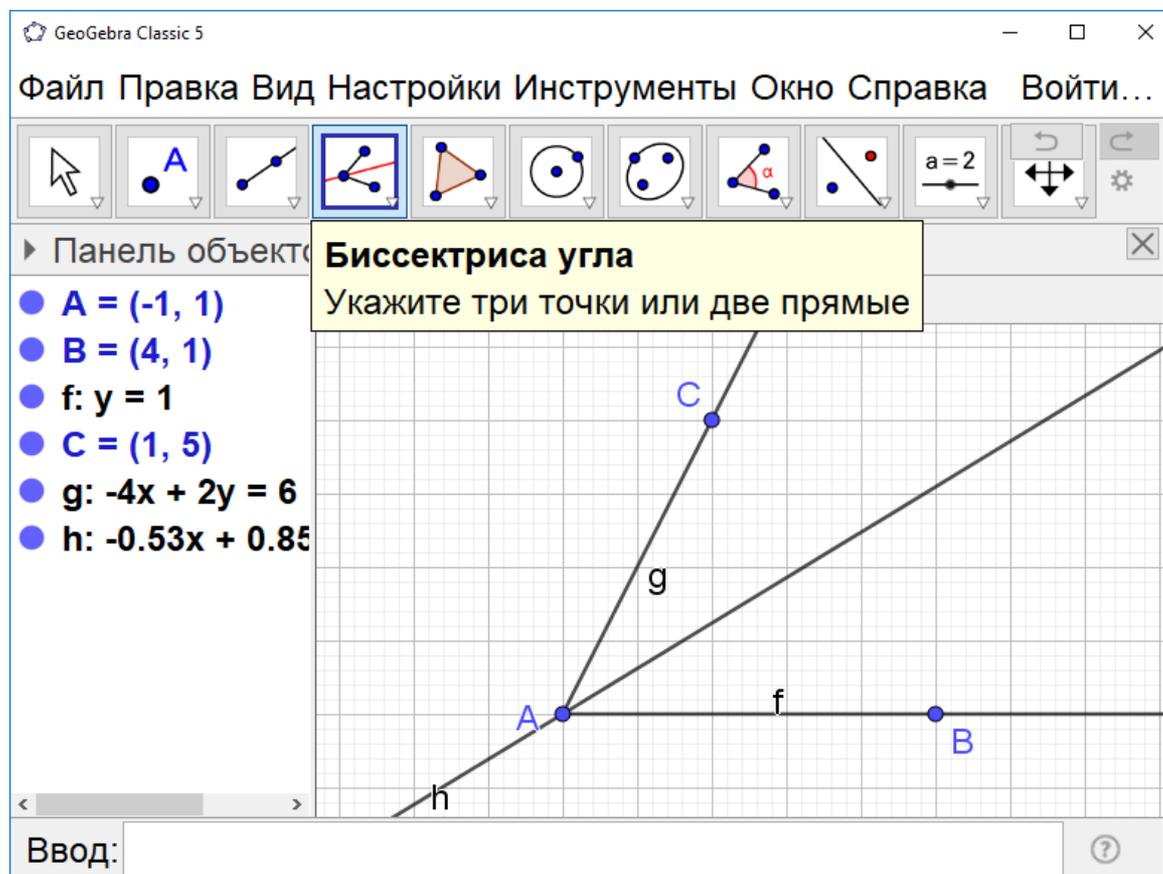
Две прямые называются *перпендикулярными*, если они образуют прямые углы (рис. 4.14).

Биссектрисой угла называется внутренний луч, делящий этот угол на два равных угла (рис. 4.15).

Для построения прямой в программе GeoGebra, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной прямой, можно воспользоваться инструментом «Перпендикулярная прямая». Для этого нужно выбрать этот инструмент, а затем последовательно нажать левой кнопкой «мыши» на данную точку и данную прямую. В результате на экране появится искомая прямая, перпендикулярная данной прямой.

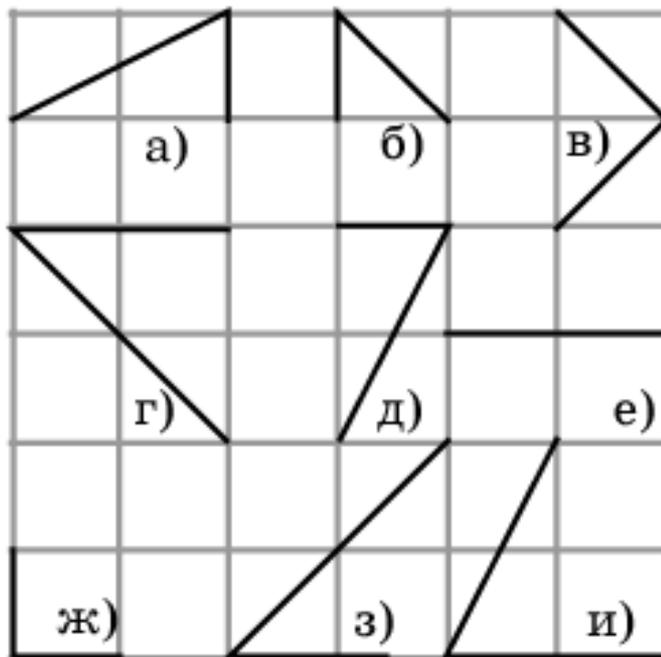


Для построения биссектрисы угла нужно нажать левой кнопкой «мыши» на окошко «Перпендикулярная прямая». В открывшихся окошках выбрать инструмент «Биссектриса угла». Затем нажать левой кнопкой «мыши» последовательно на точку на одной стороне угла, вершину угла, точку на другой стороне угла. В результате на экране появится прямая, содержащая биссектрису данного угла.

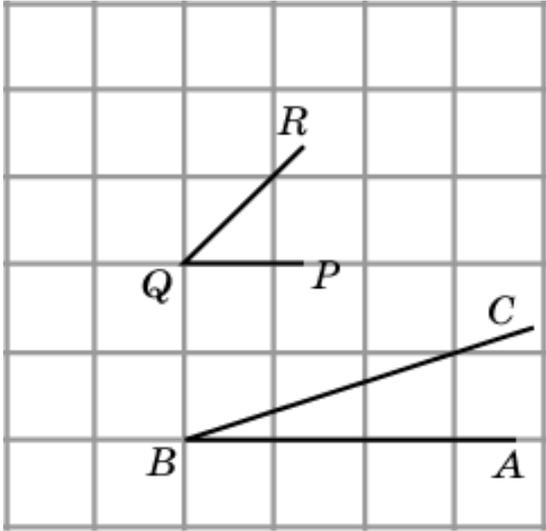


Упражнения

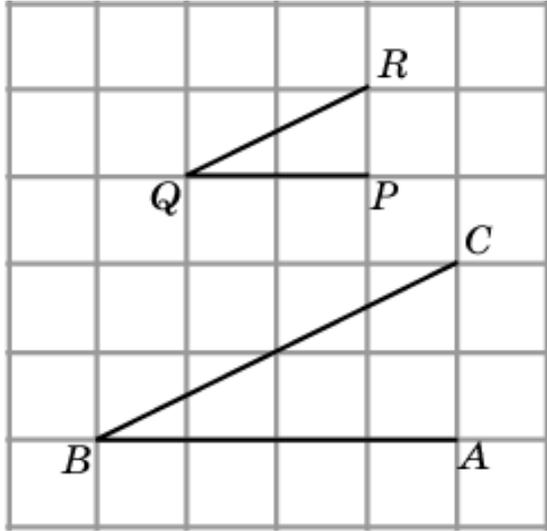
1. Среди углов, изображённых на рисунке, укажите равные углы.



2. Какой из углов, изображенных на рисунке, больше?

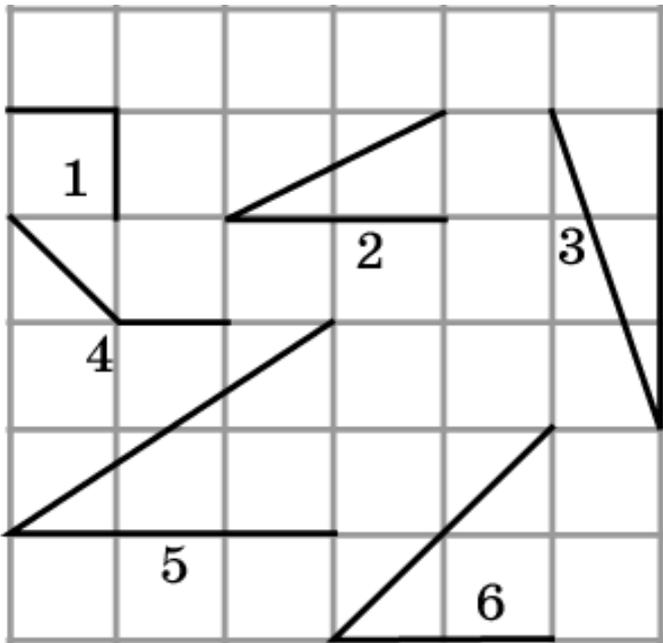


a)

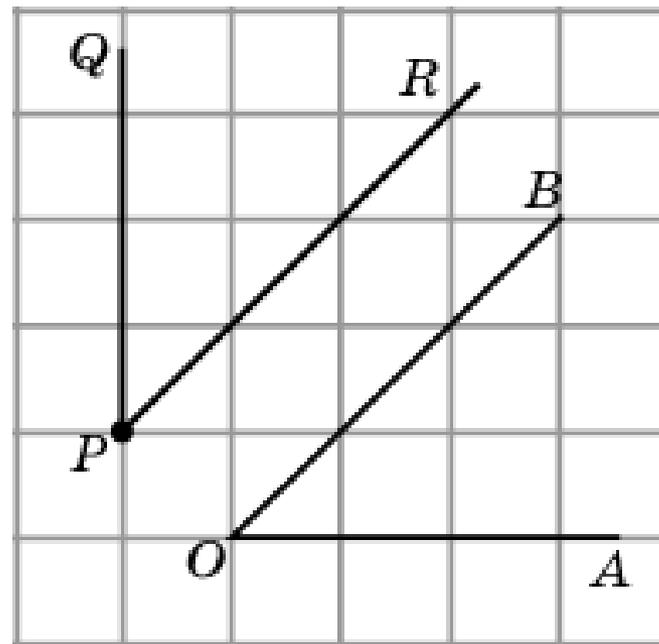
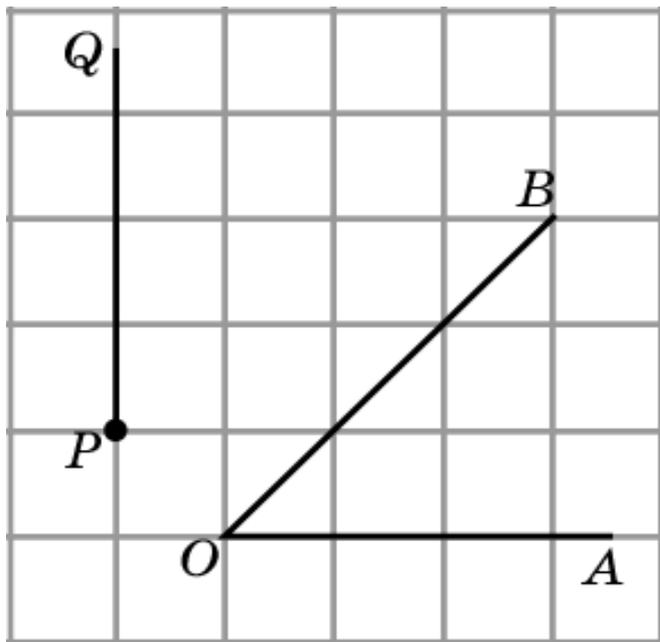


б)

3. Расположите номера в порядке возрастания соответствующих углов.

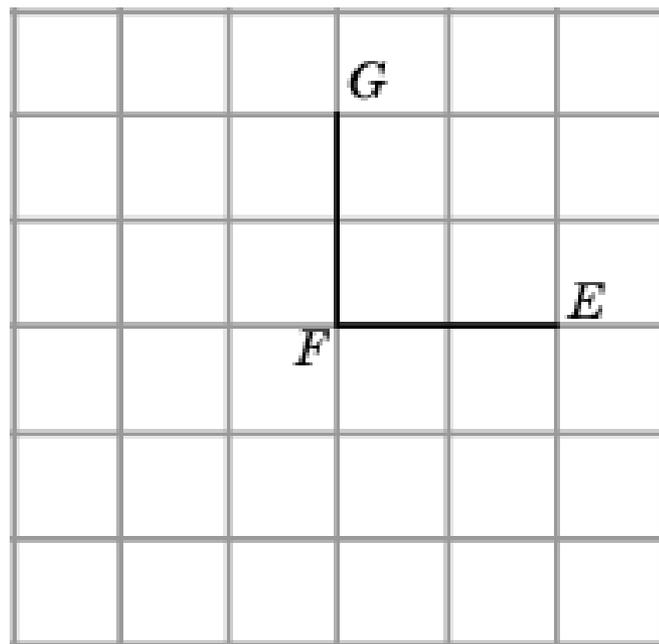
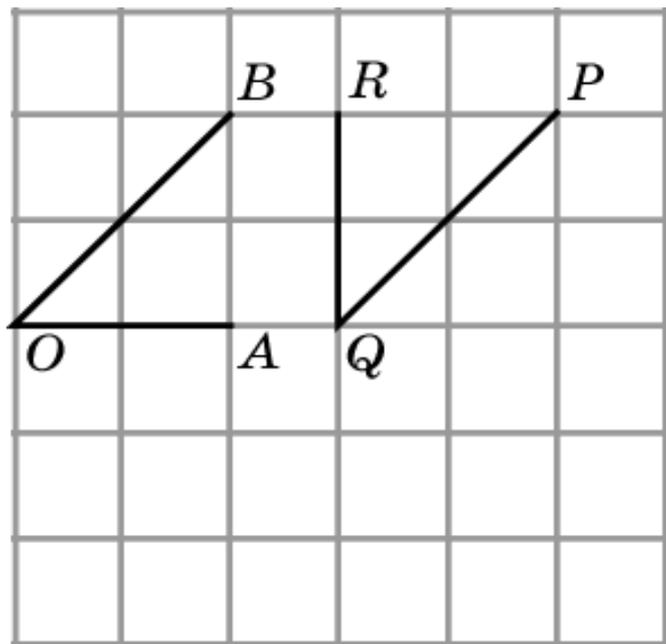


4. От луча PQ отложите угол QPR , равный углу AOB .



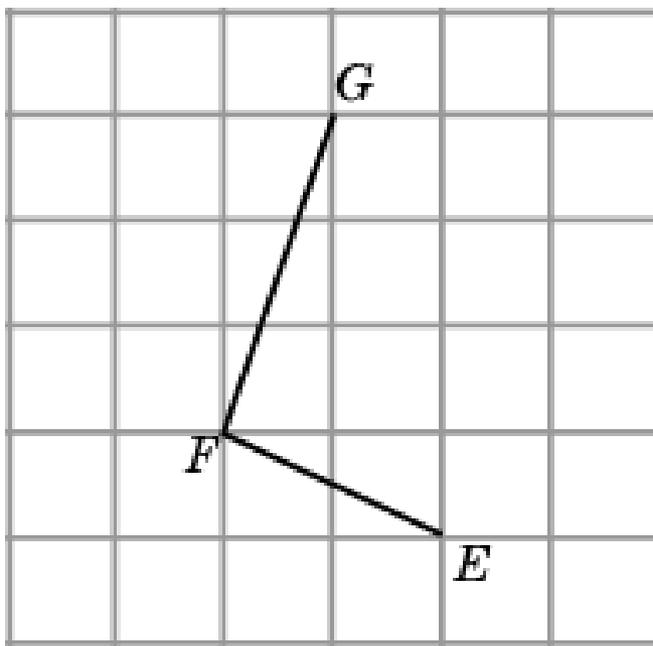
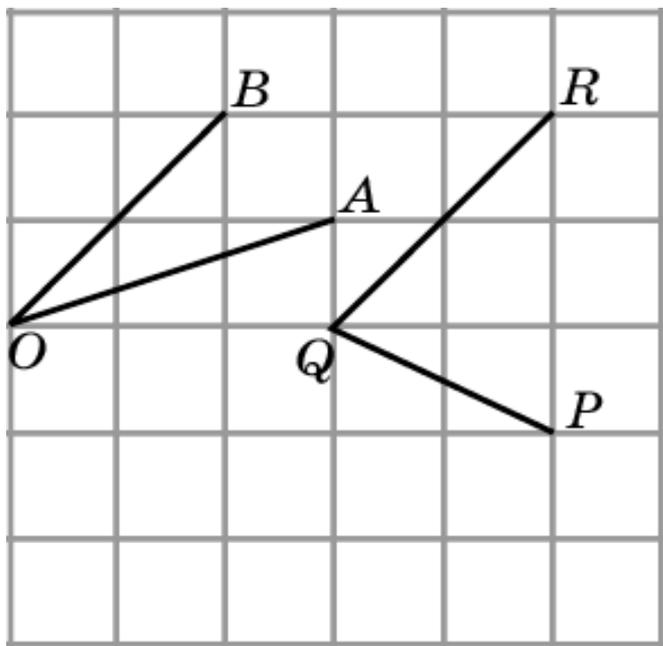
Ответ:

5. Изобразите угол, равный сумме углов AOB и PQR .



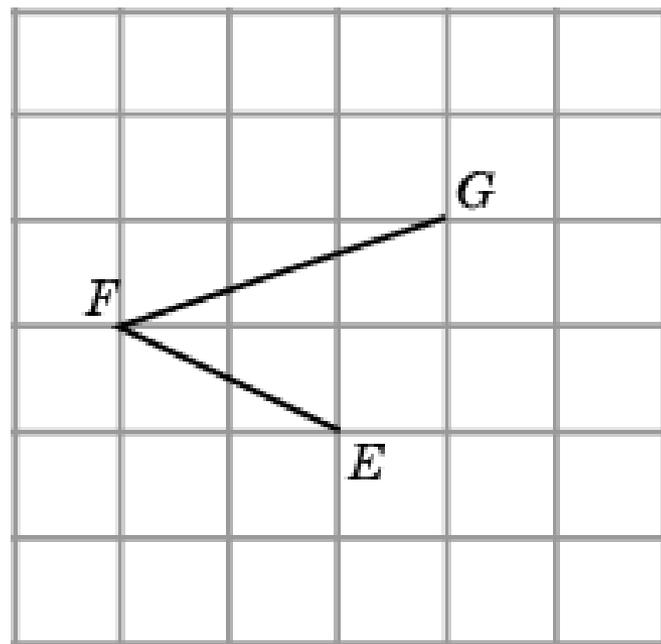
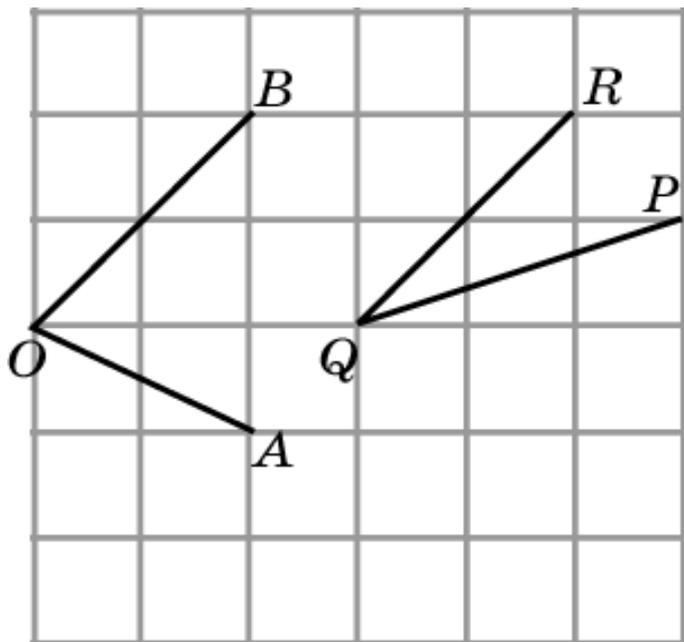
Ответ:

6. Изобразите угол, равный сумме углов AOB и PQR .



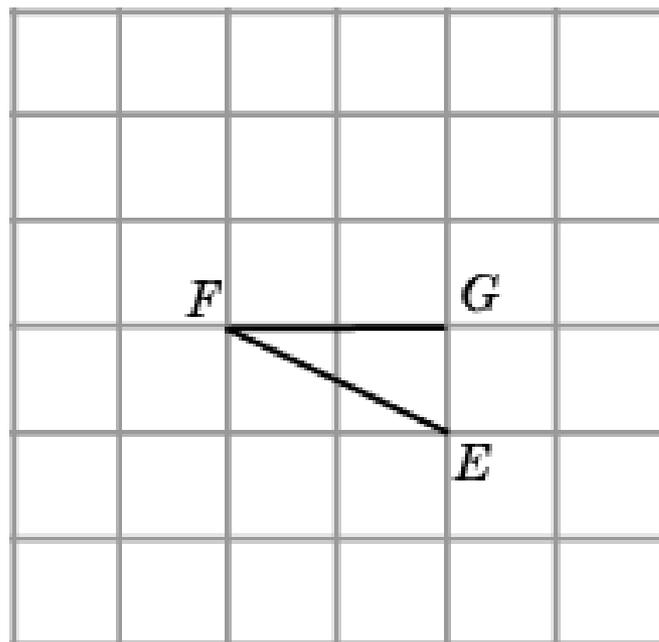
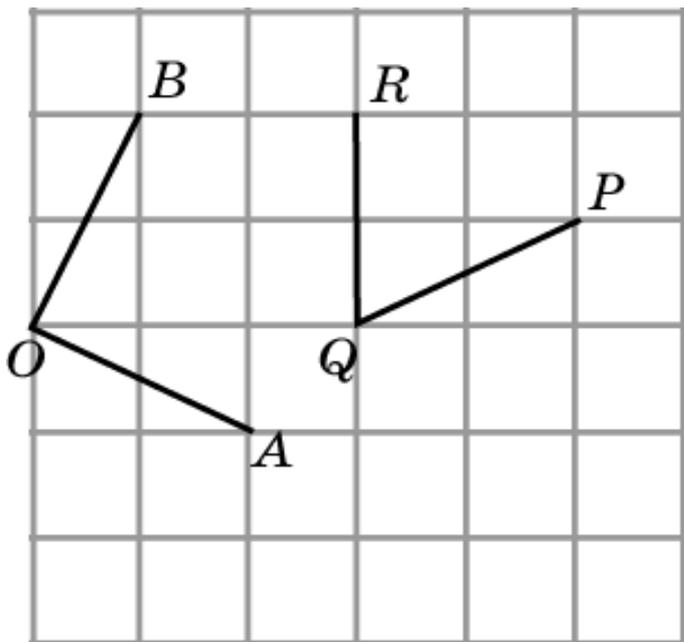
Ответ:

7. Изобразите угол, равный разности углов AOB и PQR .



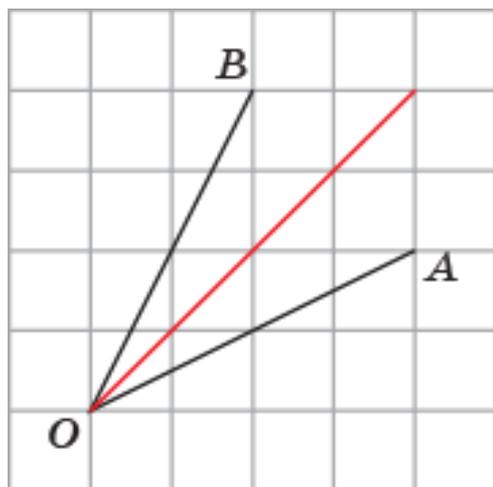
Ответ:

8. Изобразите угол, равный разности углов AOB и PQR .

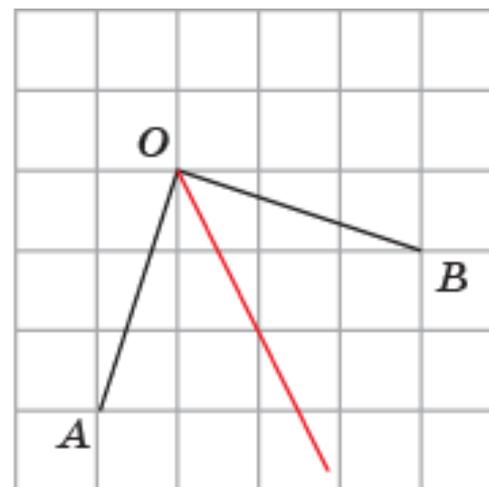


Ответ:

9. Изобразите биссектрису угла.



а)



б)

Ответ:

10. Какой угол, который образуют биссектрисы вертикальных углов.

Ответ. Развёрнутый.

11. Какой угол, который образуют биссектрисы смежных углов.

Ответ. Прямой.



Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:

105043, Москва, ул. 6-я Парковая, д. 29 Б

Тел.: 8 (499) 367–67–81

Е-mail: ioc@mnemozina.ru

Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:

Е-mail: td@mnemozina.ru

Тел.: 8 (495) 644–20–26

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте «Школа в кармане»:

<http://pocketschool.ru>