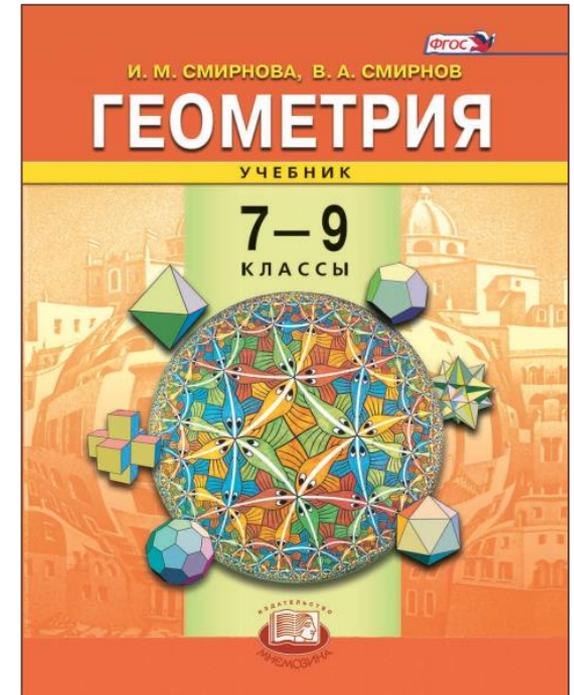


НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИ



ВЕДУЩИЙ: Смирнов Владимир Алексеевич, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики МПГУ, автор учебников по геометрии для 5-6, 7-9 и 10-11 классов

1. Основные геометрические фигуры

Основными геометрическими фигурами являются точка, прямая и плоскость.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь.

A •

• B

• C

Древнегреческий ученый Евклид, впервые давший научное изложение геометрии, в своей книге "Начала" определял точку как то, что не имеет частей.

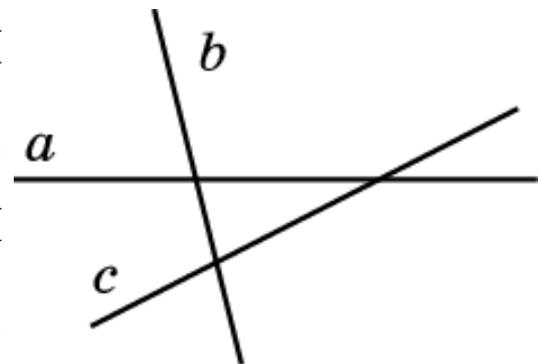
Точки изображаются остро отточенным карандашом или ручкой на листе бумаги, мелом на доске и т.п.

Точки обозначаются прописными латинскими буквами $A, B, C, \dots, A_1, B_2, C_3, \dots, A', B'', C''', \dots$

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

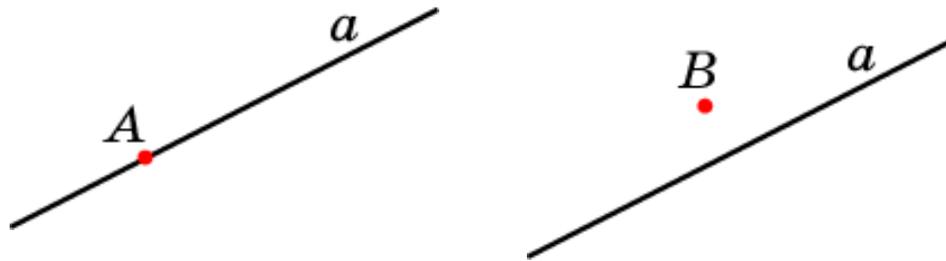
Прямые проводятся на листе бумаги или доске с помощью линейки. Хотя изображения прямых ограничены, их следует представлять себе неограниченно продолженными в обе стороны.

Прямые обозначаются строчными латинскими буквами $a, b, c, \dots, a_1, b_2, c_3, \dots, a', b'', c''', \dots$, или двумя прописными латинскими буквами $AB, CD, \dots, A_1B_1, C_2D_2, \dots, A'B', C''D'', \dots$



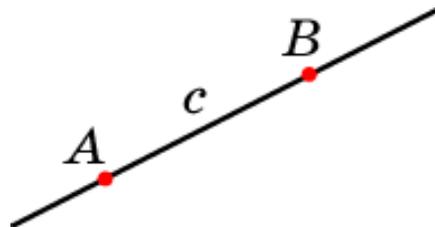
Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т.п.

Точка может принадлежать данной прямой, в этом случае говорят также, что прямая проходит через точку, а может и не принадлежать ей, в этом случае говорят, что прямая не проходит через точку.



В качестве аксиомы принимается следующее свойство прямых:

Через любые две точки проходит единственная прямая

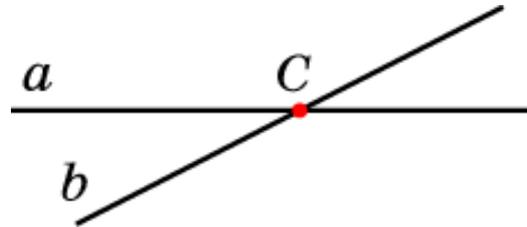


Обозначения

Запись	Чтение
A, B, C, \dots	Точка A , точка B , точка C , ...
a, b, c, \dots	Прямая a , прямая b , прямая c , ...
AB, CD, \dots	Прямая AB , прямая CD , ...
$A \in a$	Точка A принадлежит прямой a .
$B \notin a$	Точка B не принадлежит прямой a .

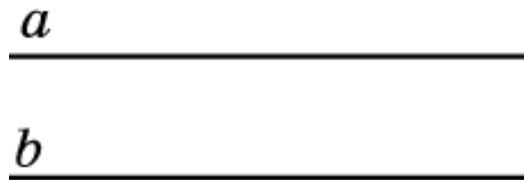
Взаимное расположение прямых

Две прямые называются **пересекающимися**, если они имеют одну общую точку.



Из приведённой выше аксиомы следует, что две прямые не могут иметь более одной общей точки.

Две прямые называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.



Вопрос 1

Какие геометрические фигуры являются основными?

Ответ: Точка, прямая, плоскость.

Вопрос 2

Какие объекты идеализирует точка?

Ответ: Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь.

Вопрос 3

Какие объекты идеализирует прямая?

Ответ: Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы, по прямой распространяется свет.

Вопрос 4

Какие объекты идеализирует плоскость?

Ответ: Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т.п.

Вопрос 5

Как Евклид определял точку?

Ответ: Евклид определял точку как то, что не имеет частей.

Вопрос 6

Как изображаются точки?

Ответ: Точки изображаются остро отточенным карандашом или ручкой на листе бумаги, мелом на доске и т. п.

Вопрос 7

Как обозначаются точки?

Ответ: Точки обозначаются прописными латинскими буквами A, B, C, \dots

Вопрос 8

Как проводятся прямые?

Ответ: Прямые проводятся на листе бумаги или доске с помощью линейки.

Вопрос 9

Как обозначаются прямые?

Ответ: Прямые обозначаются строчными латинскими буквами a , b , c , ... или двумя прописными латинскими буквами AB , CD ,

Вопрос 10

Какие свойства основных геометрических фигур называются аксиомами?

Ответ: Аксиомами называются свойства геометрических фигур, принимаемые без доказательства.

Вопрос 11

Как переводится слово «аксиома» с греческого языка?

Ответ: Достойное признание, не вызывающее сомнения.

Вопрос 12

Как могут располагаться друг относительно друга точка и прямая?

Ответ: Точка может принадлежать данной прямой, а может и не принадлежать ей.

Вопрос 13

Какое свойство принимается в качестве аксиомы взаимного расположения точек и прямой?

Ответ: Через любые две точки проходит единственная прямая.

Вопрос 14

Какие две прямые называются пересекающимися?

Ответ: Две прямые называются пересекающимися, если они имеют одну общую точку.

Вопрос 15

Какие две прямые называются параллельными?

Ответ: Две прямые называются параллельными, если они не имеют ни одной общей точки.

Упражнение 1

Точки A , B , C принадлежат одной прямой и точки B , C , D принадлежат одной прямой. Что можно сказать о всех точках A , B , C , D ?

Ответ: Принадлежат одной прямой, так как через две точки проходит одна прямая.

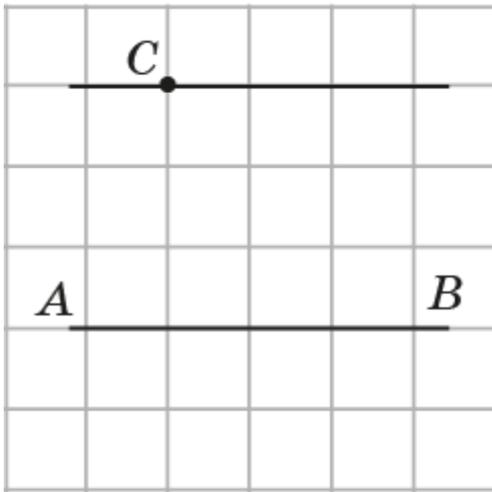
Упражнение 2

Прямые a , b , c пересекаются в одной точке и прямые b , c , d пересекаются в одной точке. Что можно сказать о всех прямых a , b , c , d ?

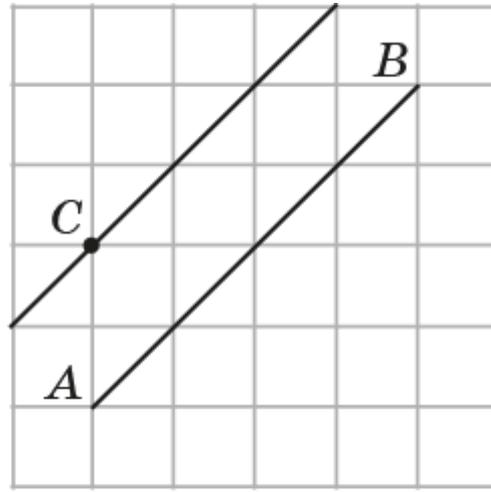
Ответ: Пересекаются в одной точке, так как две прямые не могут иметь более одной общей точки.

Упражнение 3

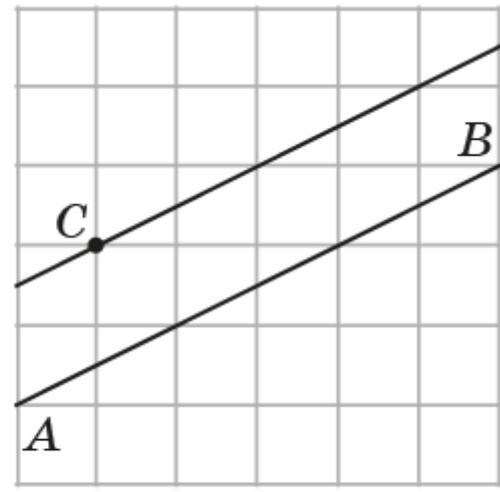
На клетчатой бумаге изобразите прямую AB и точку C , как показано на рисунке. Через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB .



а)



б)

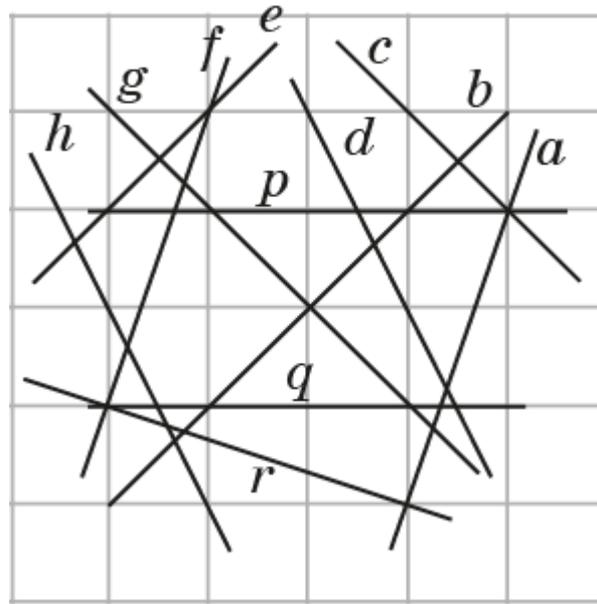


в)

Ответ:

Упражнение 4

Укажите прямые, изображенные на рисунке: а) параллельные прямой a ; б) пересекающие прямую a .



Ответ: а) f ;

б) $b, c, d, e, g, h, p, q, r$.

Упражнение 5

Сколько прямых можно провести через: а) одну точку; б) две точки; в) три точки?

Ответ: а) Бесконечно много;

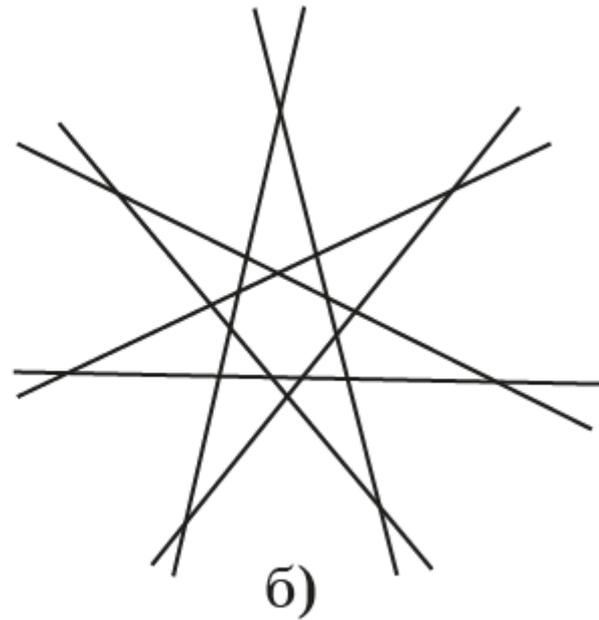
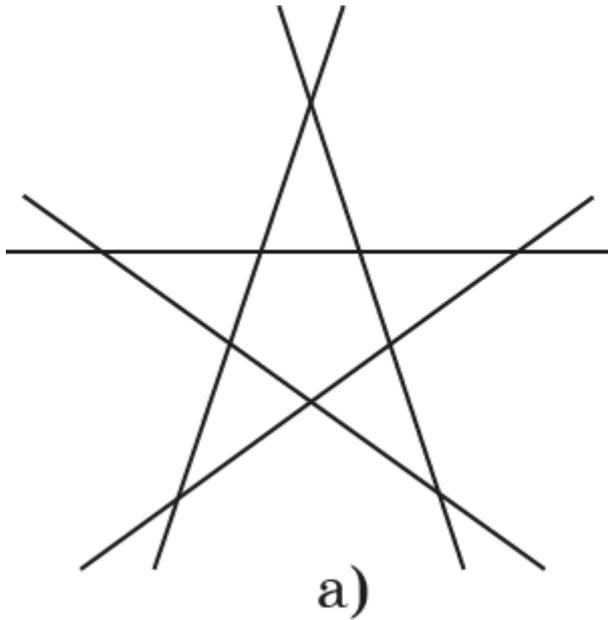
б) одну;

в) либо одну, либо ни одной.

Упражнение 6

Сколько прямых изображено на рисунке?

Сколько у них точек попарных пересечений?

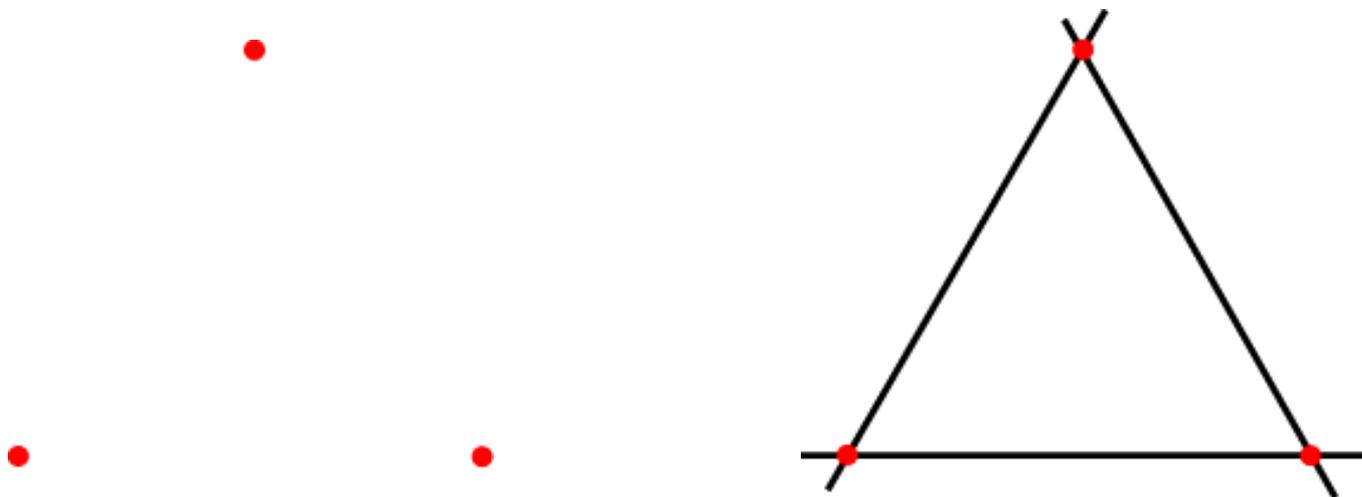


Ответ: а) 5 прямых, 10 точек.

б) 7 прямых, 21 точка.

Упражнение 7

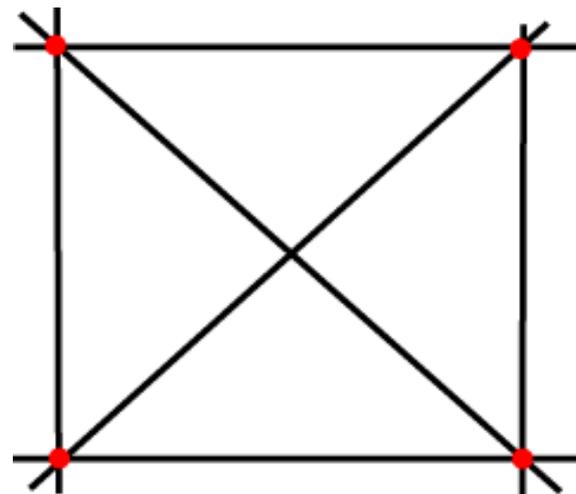
Сколько прямых можно провести через различные пары из трёх точек, не принадлежащих одной прямой?



Ответ: Три.

Упражнение 8

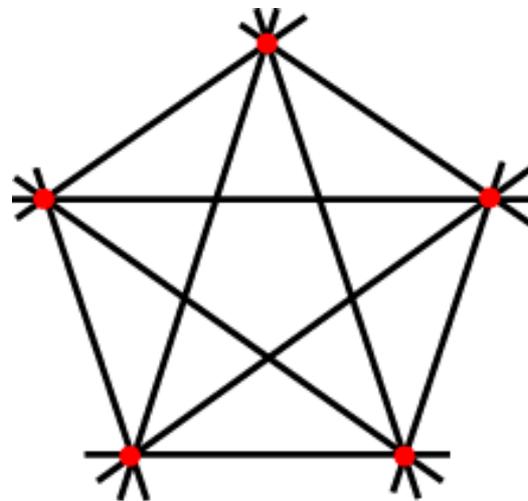
Сколько прямых можно провести через различные пары из четырёх точек, ни какие три из которых не принадлежат одной прямой?



Ответ: 6.

Упражнение 9

Сколько прямых можно провести через различные пары из пяти точек, ни какие три из которых не принадлежат одной прямой?

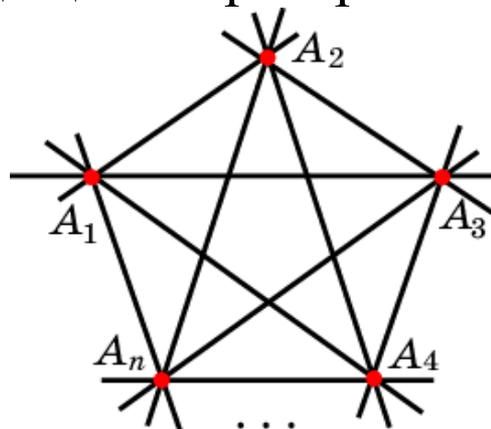


Ответ: 10.

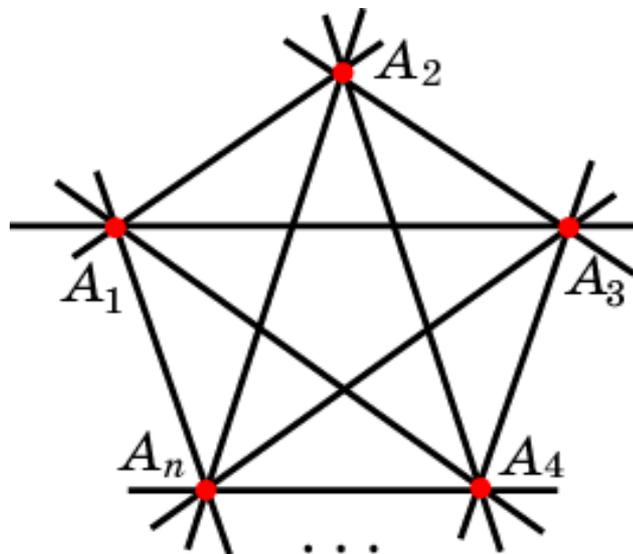
Упражнение 10*

Сколько прямых можно провести через различные пары из n точек, ни какие три из которых не лежат на одной прямой?

Решение 1. Пусть A_1, \dots, A_n — n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Зафиксируем точку A_1 . Так как число оставшихся точек равно $n - 1$ и через каждую из них и точку A_1 проходит одна прямая, то через точку A_1 будет проходить $n - 1$ прямая. Заметим, что рассуждения, проведенные для точки A_1 , справедливы для любой другой точки. Поскольку всего n точек и через каждую из них проходит $n - 1$ прямая, то число прямых, посчитанных для всех точек, будет равно $n(n - 1)$. При этом, поскольку одна прямая проходит через две точки, то каждую прямую посчитаем дважды, один раз как прямую, проходящую через одну точку, а другой — как прямую, проходящую через вторую точку. Следовательно, число прямых, проходящих через различные пары из n данных точек, будет равно $\frac{n(n-1)}{2}$.



Решение 2. Выясним, на сколько увеличивается число прямых при добавлении новой точки к данным. Через две точки проходит одна прямая. Если к данным точкам добавляется третья точка, то к этой прямой добавляется две прямые, проходящие через третью точку и одну из двух данных. Аналогично, если добавить n -ю точку A_n к данным $n - 1$ точкам A_1, \dots, A_{n-1} , то к числу прямых, проходящих через различные пары из точек A_1, \dots, A_{n-1} , добавится $n - 1$ прямая, проходящих через точку A_n и одну из точек. Таким образом, общее число прямых равно сумме $1 + 2 + \dots + n - 1$. Эта сумма равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

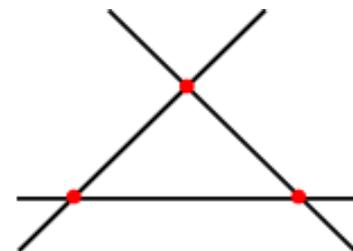
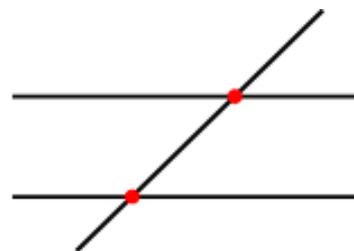
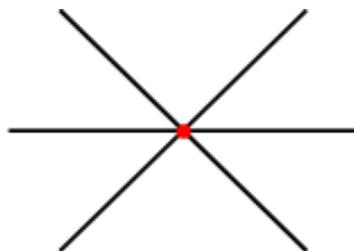


Полученная формула числа прямых имеет большое значение, в дальнейшем будет появляться при решении различных комбинаторных задач. Поскольку каждая прямая однозначно задается двумя точками, мы, по существу, вычислили, сколько различных пар можно составить из n элементов. При этом не имеет значение, какие это элементы. Число таких пар называется числом сочетаний из n элементов по два и обозначается C_n^2 . Например, если в классе 20 учеников, то число различных пар, которые можно образовать из учеников этого класса, равно $C_{20}^2 = 190$.

Упражнение 11

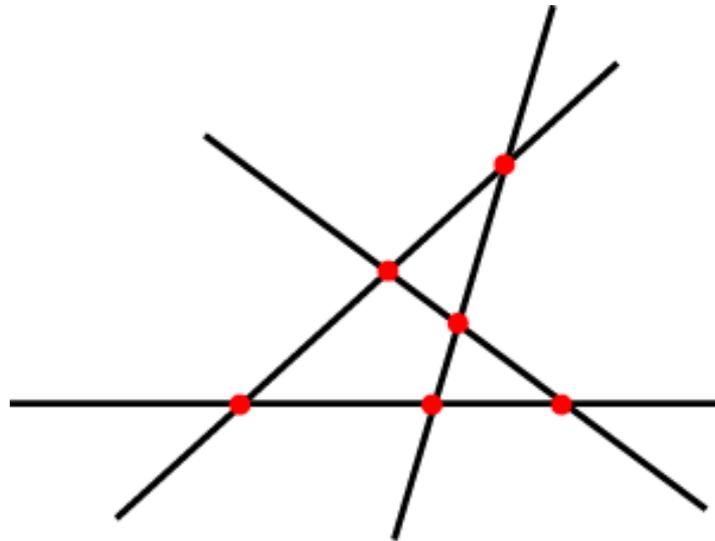
Сколько различных точек попарных пересечений могут иметь три прямые?

Ответ: Ни одной, одну, две, три.



Упражнение 12

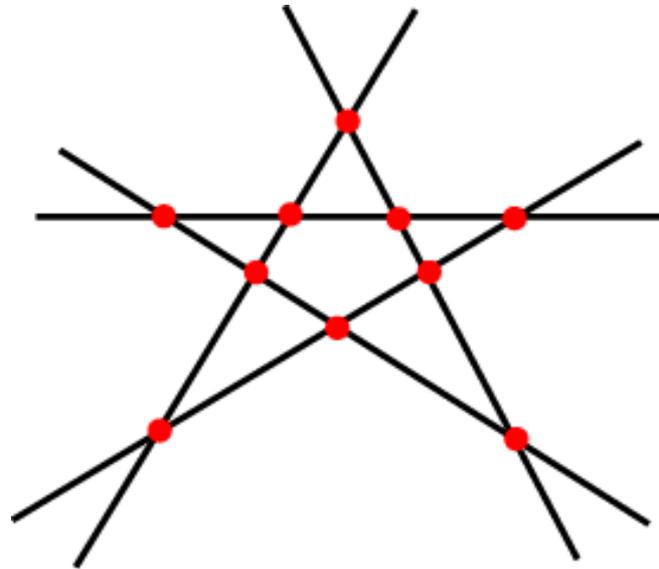
Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре прямые?



Ответ: 6.

Упражнение 13

Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь пять прямых?



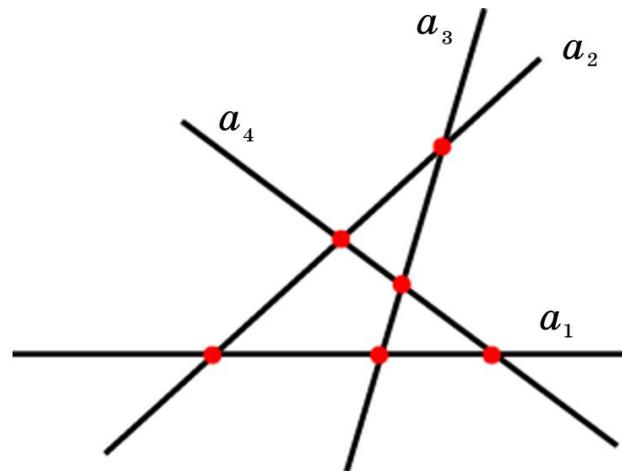
Ответ: 10.

Упражнение 14*

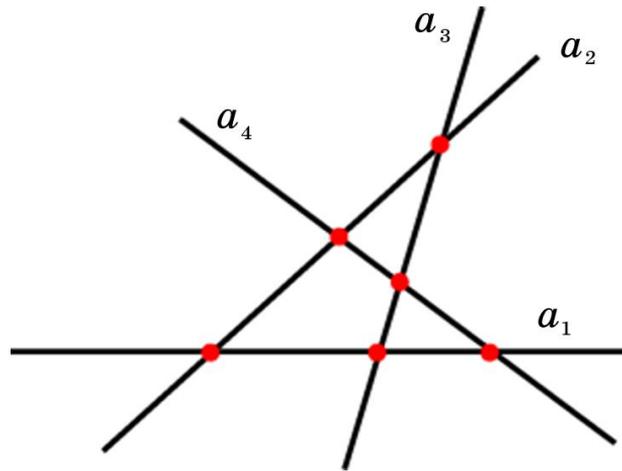
Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых?

Решение 1. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая прямая пересекается с каждой, при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке. В этом случае каждая прямая имеет $n - 1$ точку пересечения с остальными прямыми, и мы находимся в ситуации, аналогичной ситуации задачи 7. Имеется n прямых и на каждой прямой $n - 1$ точка. При этом, каждая точка принадлежит ровно двум прямым. Следовательно, число точек попарных пересечений будет равно

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

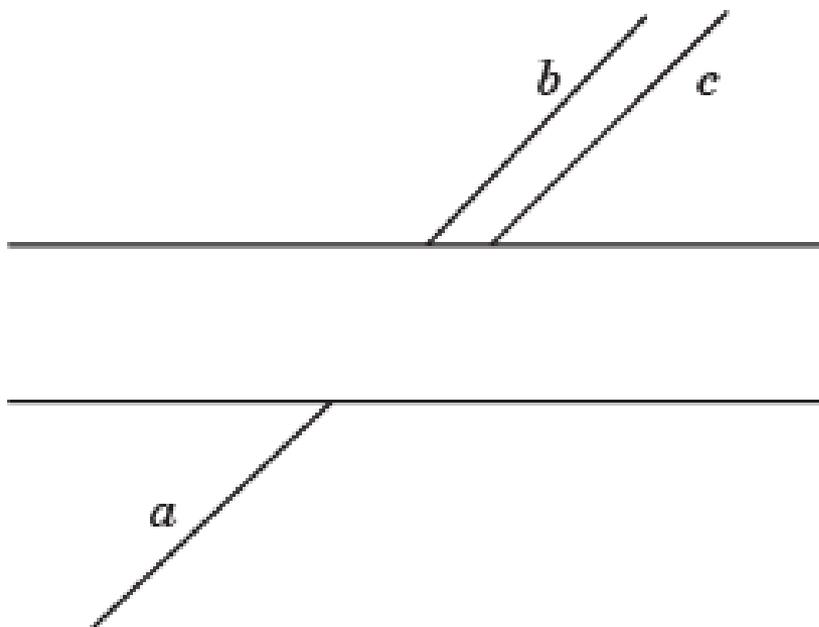


Решение 2. Можно было бы рассуждать и короче. Действительно, для того, чтобы подсчитать количество точек пересечения, достаточно подсчитать, количество пар прямых, которые можно образовать из данных n прямых. Как мы знаем, это число равно $\frac{n(n-1)}{2}$.



Упражнение 15

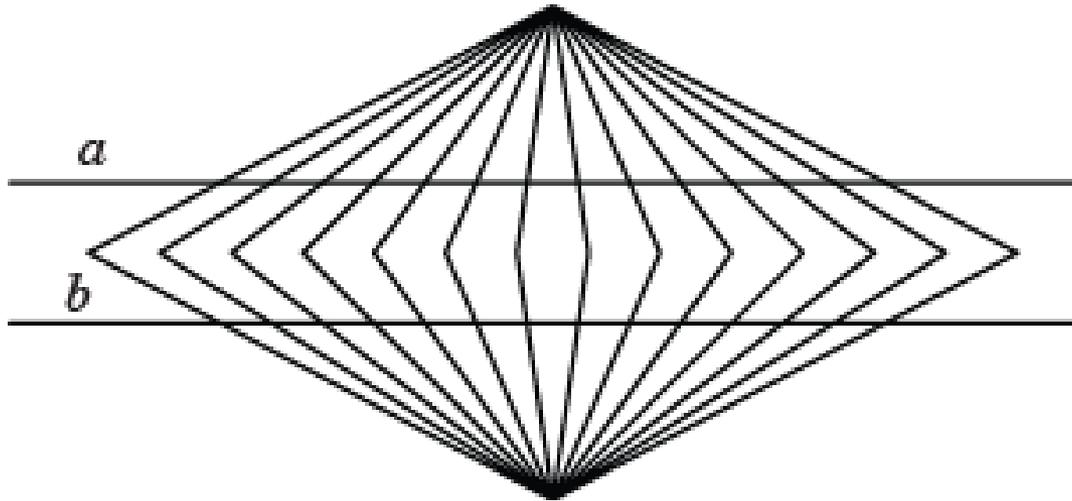
Не используя линейку, скажите, какие две линии a и b или a и c изображают одну и ту же прямую. Ответ проверьте с помощью линейки.



Ответ. a и c .

Упражнение 16

Не используя линейку, скажите, являются ли линии a и b прямыми или нет. Ответ проверьте с помощью линейки.



Ответ. Являются прямыми.



Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:

105043, Москва, ул. 6-я Парковая, д. 29 Б

Тел.: 8 (499) 367–67–81

Е-mail: ioc@mnemozina.ru

Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:

Е-mail: td@mnemozina.ru

Тел.: 8 (495) 644–20–26

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте «Школа в кармане»:

<http://pocketschool.ru>